# 关于复数几个知识点的理解和应用

主 持 人：**吴天康**

小组成员：**古一含**

指导教师：**王晶晶**

学 校：**徐州市矿大实验学校**

目录

[摘要 1](#_Toc146400675)

[1.前言 2](#_Toc146400676)

[2.课题简介 4](#_Toc146400677)

[2.1课题目的 5](#_Toc146400678)

[2.2课题任务与要求 5](#_Toc146400679)

[3.研究方法和内容 5](#_Toc146400680)

3.1 洛朗级数…………………………………………………………………………5

3.2 的幂级数展开方法……………………………………………………………8

3.3 的幂级数展开方法……………………………………………………………9

3.4总结…………………………………………………………………………………13

摘要

众所周知，无论是在理论知识的推导还是在实际工程中的应用，幂级数展开式都发挥着重大的基础作用。因此，课题在所学复数知识的基础上，结合已有的幂级数理论，特别是复变函数中洛朗级数的理论，主要做了如下工作：

主要使用复变函数中与洛朗级数相关的知识，结合待定系数法，给出了函数的幂级数展开式。另外在已有的幂级数展开方法基础上，使用Schur多项式工具，给出了函数的幂级数展开式。该工具提供了一类形如函数幂级数展开式中系数的递推公式，比已有方法更高效、直观。

关键词：幂级数，级数除法，Schur多项式

# 1.前言

十八世纪初期，复变函数论渐渐开始迈出新芽。关于复变量的复变函数总是能表示为带有实部和虚部的形式。到了十九世纪的时候，数学家柯西和黎曼为了更加详细的研究流体力学，提出来“柯西-黎曼条件”。1770年在研究旋转体关系期间，拉普拉斯得到了著名的拉普拉斯方程，。瑞士数学家欧拉对复变函数所做出的工作，他于1777年比较完备地建立起了复数理论，对复变函数论中的一些重要结论进行了补充说明，发现了复指数函数与三角函数两者之间存在某种微妙的联系，并且成功地把复变函数理论与实际联系起来，在地图制图学和水力学上取得重大突破。

十九世纪，复变函数论（单复变函数论）才开始进入全面前进地步伐，这时期的复函数是通过保形映射、部分分式积分法及实系数多项分解等联系进入数学的。大多数数学家都开始对这个新型的数学分支着迷，并把研究复变函数相关理论当作为学习数学的一种享受，柯西在《分析与数学物理练习》论文中给出函数展开为麦克劳林级数的一个判别法则，这个定理的证明结果就是现在的柯西积分公式。柯西在论文《伸展到一个闭曲线的所有点积分》中证明整函数积分值为零，得到复变函数与路径无关定理的新证明。在德国数学家魏尔斯特拉斯和黎曼、法国数学柯西等人的不断努力下，复变函数的理论和体系得到日益完备，且理论框架已经系统形成，于此同时，它也逐渐渗透到如流体力学、电学、和热力学中。

从二十世纪到现今，在弹性力学、信号系统、天体力学和理论物理等方面看到复变函数论发挥着重要的推动作用。早期的复变函数论工作的推进主要是由数学家达朗贝尔、欧拉所贡献的，法国数学家拉普拉斯也研究过复变函数论中与积分相关的一些内容，复变函数论这门学科的发展奠定了大量基础工作以至于形成非常系统的理论，我们也可以看到许多数学家在复变函数这一研究领域内做出许多创新工作，如数学家阿达玛、彭加勒等他们都促进了复变函数论更为完善的发展。

从柯西在他的论文中提到的两个方程算起，它不但推动了一些基础性学科的发展，而且经常在工程实际问题中被当作为一门重要的数学工具被广泛地运用。

公元前四世纪左右，亚里士多德就已经论证了公比大于零小于1的几何级数可以求和。虽然级数的具体定义和定理没有涌现在这时候，使得他们在一段时间内对级数无穷的特点无可奈何。相反阿基米德却运用几何级数的知识求出了抛物线弓形面积的和。在使用积分求面积和体积的积分计算中，级数同样发挥着重要的作用，这也为后来积分的进一步完善起到了关键性的作用。“一尺之锤，日取其半，万世不竭”十二个字出自于《庄子·天下》，其中蕴含着极限的思想，但是当把它用数学的语言表达出来就会发现

和无穷级数相关联。公元263年，魏晋时期的中国数学家刘徽创立了“割圆术”，“割圆术”的要旨为求圆的面积，该方法的特点就是不断用圆的内接正多边形面积来无限的接近圆。这种无限逼近的方法就采用了级数求和思想，即把无穷多个数累加起来。其实那时候的级数也涉及到一些哲学和逻辑的悖论问题，然而相关学者并没有把各个方面的问题合并起来用级数方法解决，也没有一本完整且全面的书籍去收纳和记录，导致了与级数理论相关的问题杂乱这一问题。

牛顿于1665年首次给出二项式定理的展开式，他在此后一年得到了的幂级数展开在对无穷级数逐项积分过程中；1668年墨卡托给出了对数函数的级数展开式；莱布尼茨在1673年得到、等三角函数的幂级数展开式。中国清代的时候，数学家坎各达和数学家董祐诚运用具有数学特色的方法和理论分别对三角函数、对数函数、指数函数的幂级数展开问题进行了挖掘。在这些时期级数理论都得到进一步发展。

十八世纪初，随着着地理学和航海业的发展，出现了困扰当时数学家的一个专业性数学问题即函数表插值。虽然格雷戈里和牛顿一起得到了格雷戈里-牛顿插公式，并且成功解决了函数表插值这一问题，但是他们并没证明该公式。随后泰勒利用函数可导性这一命题并结合Gregory-Newton内插公式得到了一种全新的级数展开——泰勒定理。拉格朗日在泰勒给出泰勒定理后，利用微积分知识得到了泰勒公式的余项表达式，这个表达式就是拉格朗日余项。

1821年柯西在严格定义极限命题上，提出无穷级数理论并不是由多项式理论简单推广而来的。有了这个认识过后，他严格的给出了级数理论。与此同时，级数的柯西收敛准则也在这一时期被他给出。在柯西进一步的研究下，他利用极限思想得到幂级数、交错级数收敛性判别方法。在柯西的推动下，大量的数学家开始把工作转到研究级数的敛散性上。如阿贝尔在柯西的研究成果下认识到级数的一致收敛性问题，但他仅仅是认识却没准确定义。但在阿贝尔之后，数学家又开始对级数一致收敛深入研究，以至于魏尔斯特拉斯得到一致收敛的定义并证明了此结论。因十八世纪无穷级数形式的发展，要求数学家对级数进行严格化的研究。高斯在研究超几何级数的收敛性问题的论文标志着级数严格化研究的开始。十九世纪柯西、欧拉、高斯等数学家给出了判别无穷级数敛散性的诸多方法和定理，级数理论在19世纪就已经全面发展起来。

# 课题简介

## 2.1课题目的

在查阅文献的基础之上，学习复变函数的基本内容，重点掌握复变函数中级数的四则运算和和函数的求法、学习留数的相关知识。应用复变函数中留数的理论求解问题。

最后通过留数求级数的展开式，并且与已学习的相关内容进行进一步的比较。

## 2.2课题任务与要求

复变函数中奇点、与洛朗级数相关的知识和理论并结合待定系数法对函数进行幂级数展开，并在此基础上得到函数幂级数展开中系数的递推公式。采用了三种方法对函数进行幂级数展开，并引进了一种新的数学工具——Schur多项式。通过Schur多项式给出函数幂级数展开中系数的递推公式。能够进行级数的计算并进行总结，具体如下：

（1）能够给出留数的计算方法。

（2）能够结合问题提出级数除法的计算问题。

（3）能够利用留数求级数的展开式。

2.3课题研究创新点

课题在原有的研究成果和理论基础上，主要拥有以下两点创新。

第一，课题对级数的除法进行了研究。以往的知识中，都没有涉及级数的除法，只给出了级数的加减乘相关的定理和结论。

第二，借助于Schur多项式工具重新研究了一类与指数函数复合的函数的幂级数展开问题，用新的工具重新解决了已有的含有指数函数的幂级数展开问题，比已有的方法更直观、更方便。

# 3.研究方法和内容

3.1 洛朗级数

**定义3.1.**称

+

(3.1)

为洛朗级数，级数中，为复常数。当负数次幂前系数为零时，该洛朗级数即为幂级数。

**性质3.2.** 洛朗级数正幂项部分为，显然它是一个幂级数，因此它的收敛域为圆域。设该幂级数收敛半径为，则时，正幂项部分发散；时，正幂项部分收敛。

**性质3.3.** 洛朗级数负幂项部分为，显然也是一个幂级数。令，那么，设该幂级数收敛半径为，则时，幂级数收敛；时，幂级数发散。令半径，则时，负幂项部分收敛；当时，负幂项部分发散。

**性质3.4**. 由性质2.7.2和性质2.7.3 可以得Laurent级数

+

当且仅当正、负幂项部分同时收敛时Laurent级数才收敛，正、负幂项部分中由一个发散时洛朗级数就会发散。因此当负、正幂项分别对应的收敛半径时，此时圆环域为正、负幂项部分的公共收敛区域，同时Laurent级数也在该圆环域内收敛。当时，洛朗级数没有收敛域，则洛朗级数发散。

**定理3.5.** Laurent级数

+

的收敛域必在圆环：内，且洛朗级数在圆环内内闭一致收敛和绝对收敛，和函数在圆环内解析，且和函数在圆环内可以分解成两个函数，其中在圆域内解析，在圆域

内解析。

**性质3.6.** 在收敛圆环域内的洛朗级数

+

的和函数不但是解析的，而且和函数可以在内逐项微分和逐项积分。

**定理3.7**. 若在圆环域：内每一点的解析，则

(3.2)

在圆环域内成立，其中，，并且展式(3.2)是唯一的，我们称展式(3.2)为在区域内的洛朗展式。

注意：

（1）展式(3.2)的右边就是洛朗级数。

（2）如果解析函数在收敛的圆环域内展开成了级数，则该级数就是洛朗级数，而且级数唯一。

**定义3.7.** 若函数在点的空心领域内解析，那么就为的一个孤立奇点（可以为），这时可以在内展开为Laurent级数

(3.3)

其中，，该部分称为的主要部分，，该部分为的解析部分。

**定理3.8**. 设为的孤立奇点(可以为)，

（1）若存在（有限复数），则称是的可去奇点。

（2）若，则称是的极点。

（3）若不存在，则称是的本性奇点。

**注：3.9.**[20]根据极点的定义判定。若为解析函数的孤立奇点，根据在邻域:内的 Laurent展开式的主要部分来判断为的几阶极点。

**注：3.10.** 利用零点与极点的关系

（1）[19]为解析函数，若是的阶极点，则就是的阶零点。若

就是的阶零点，则是的阶极点。

（2）[20]若和都是以为零点的解析函数，且和不恒为零，假设是的阶零点，是的阶零点。则，当时与在极点处阶数相同。

**注：3.11**. [20] 判定形如复变函数极点的阶数

（1）当，，时，可知为极点，根据注3.10.可知该极点的阶数。

（2）当，，（为常数）时，可知为可去奇点。

（3）当，，时，可以为极点.可知极点的阶数。

**注：3.12.** ∙和的极点及其阶数的判定

（1）判断∙和复变函数的极点及其阶数，可以转化为的形式进行判定.

当时分母没有意义，知在处不解析，但在的某个领域内解析，故在处有洛朗展式。知为的极点，从注3.10得为的一阶极点，根据洛朗级数极点的定义[13]知的洛朗展开式为。

**3.2 的幂级数展开方法**

**方法3.2.1** 由得

（3.2.1）

将代入（3.2.1）式有

（3.2.2）

根据等式（3.2.2）两边同次幂系数相等得

，，，，，

所以

（3.2.3）

□

其实把等式（3.1.2）左边的每一项看作矩阵中的元素，得到一个∞∞阶矩阵

 （3.2.4）

根据（3.2.2）式两边同次幂系数相等并结合矩阵（3.2.4），我们很快可以发现展开式中系数有如下规律



一般地，我们可以得到的递推式

（3.2.5）

□

通过式（3.2.3）可以发现是奇函数且幂级数展开式中没有偶数次幂，那么就无奇数次幂，我们也可以使用下列方法得到的幂级数展开式。

**方法3.2.2** 因是奇函数，则为偶函数，故其在 处的洛朗级数展开式中只有偶数次幂而无奇数次幂，即。从引言得知，那么就没有这一项，于是可设

（3.2.6）

利用

（3.2.7）

将（3.2.6）和（3.2.7）代入等式得：

（3.2.8）

根据等式（3.2.8）两边系数相等，得到系数

，，，， （3.2.9）

将（3.2.9）代入（3.2.6）得

（3.2.10）

将等式（3.2.10）两边同时除以，则

3.3 的幂级数展开方法

**方法3.3.1** 由

（3.3.1）

及

（3.3.2）

将（3.3.1）和（3.3.2）代入到，则

=

=

∙

（3.3.3）

□

注意：

从（3.3.3）最后一个等式中可以看出，对于的系数，通过合并同类项后，展开式前几项的系数很容易获得，当的次数过于大后，计算就变得困难起来，的系数就变得不那么显然了，这迫切需要一种新的方法。

下面考虑一类形如的幂级数展开，其中的幂级数展开式为=, 且满足。

**定理3.3.2**[18] 设的幂级数展开式为，且。则的幂级数展开式为

其中由下列递推式给出

（3.3.4）

证明：

因的收敛域为，那么在内就有收敛的幂级数，设该幂级数为

（3.3.5）

对(3.3.5)式两边同时关于求导得

（3.3.6）

将(3.3.5)式及代入(4.2.6)得

（3.3.7）

根据柯西乘法法则和幂级数恒等原理[21]，式(3.3.7)左右两边关于的系数相等，就得到系数的递推式为

□

**方法3.3.3** 我们先考虑的幂级数展开式。

由定理2.3.5知

， （3.3.8）

其中且满足。

由定理3.3.2知

3.3.9）

根据（3.3.4）式递推，可以得到的系数为

，，，，， （3.3.10）

将系数（3.3.10）代入式（3.3.9）中得

（3.3.11）

现在考虑的幂级数展开式，因

（3.3.12）

故将（3.3.11）代入（3.3.12）得

□

下面引入新的数学工具Schur多项式。

**定义3.3.4** 称满足下面等式的多项式为Schur多项式

（3.3.13）

的具体表达式为

== （3.3.14）

注意：

中的t为一个无穷维向量，即。可以看成关于、λ的二元函数。

由于具体表达式不方便推出，为了方便我们给出所满足的递推关系式。

**定理3.3.5** 所满足的递推关系式为

（3.3.15）

证明：

对式(3.3.13)两边同时关于求导得

（3.3.16）

将(3.3.13)式代入(3.3.16)式左边，则左边为

==

（3.3.17）

（注：上式第二个等号成立是因为我们令，则≥，因要同时满足≤≤，≤，所以≤≤)

另一方面，(3.3.16）式的右边化为

（3.3.18）

(3.3.17)式与(3.3.18)式结合，比较的同次幂的系数，根据同次幂系数相等的关系，我们可以得到递推式：

=

□

作为参考，我们列出Schur多项式的前5项：

=，=

注意：

从定义3.3.4中可以看到，对于等式而言，等式左边可以看成一个与指数函数复合的函数，而等式右边当为实向量时，Schur多项式也就为实数，故我们可以把看成等式左边函数的幂级数展开式。其中向量中的元素为函数幂级数展开式中对应的项前的系数。

下面用Schur多项式对进行幂级数展开。

**方法3.3.6** 我们先考虑的幂级数展开式。对函数与进行比较，令，，。则的幂级数展开式就有形如的形式，即

（3.3.19）

其中为Schur多项式。由，根据（3.3.15）的递推式我们可以得到

，，，，， （3.3.20）

将系数（3.3.20）代入到等式（3.3.19）中得到

（3.3.21）

现在考虑的幂级数展开式，因

（3.3.22）

将（3.3.21）代入到（3.3.22）中，得

□

注意：

无论是递推式（3.3.4）还是递推式（3.3.15），我们都考虑的是对形如函数的幂级数展开，其中有幂级数展开式。

仔细观察会发现，当向量时，其中为 幂级数展开式中系数，那么递推式（3.3.4）与递推式（3.3.15）完全一样，这说明了Schur多项式的优越性。

3.4总结

对于的幂级数展开问题，与方法4.2.1一样，我们常常先对进行幂级数展开，然后在通过指数函数的幂级数展开，通过这样的步骤我们可以发现我们只能得到的前几项，的次数过高后我们将无计可施。但是递推式（3.3.4）与递推式（3.3.15）给我们提供了解决次数过高后系数的问题，完善了一类的幂级数展开问题。使用Schur多项式，我们可以对与指数函数复合的函数如等幂级数展开式信手拈来。但是一般来说，有些的幂级数展开式不那么好求，如上一章的函数，就算求出的幂级数展开式,但并不是我们想要的形式，我们也对的幂级数展开式无从下手。这告诉我们函数的幂级数展开式还值得挖掘。