**平面上 10 个点相互连接组成三角形个数最值及其结论的推广**

## 结题报告

**主 持 人：赵常景行**

**小组成员：陈雨 石永烨 张金阳**

**指导老师：李杨**

**学 校：徐州市矿大实验学校**

**平面上10个点相互连接组成三角形个数最值及其结论的推广**

摘要：对于平面上10个点彼此相连构成最多的三角形个数这一问题的探究，并将结论推广至平面上任意点数的情况。

问题提出（陈雨）：

平面上给定10个随机点，彼此连接，求由这些连线构成三角形个数的最大值。

方法一（石永烨、赵常景行）（陈雨整理）：

思路：通过对点连线构成三角形的基础构型分析，得到关于n个点连线的一般结论，再将n=10代入得到答案。

具体过程：

平面上点连线构成三角形共有如下情况：

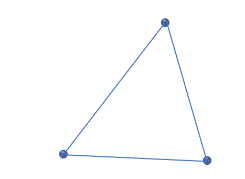


图1-1

1．三点式（图1-1）：即只用三个端点构成的三角形，而任意三个端点能且只能构成一个三角形，因此三个点在图形中每一种排列方式最多对应一个三角形，因此三点式三角形共有个。

2．四点式（图1-2）：必须用四个端点才能构成的三角形，由一个交点和两个端点构成，而每两个相邻的端点可以充当一次三角形的底边，因此每四个点的每一种排列方式都最多对应四个四点式三角形，因此这种三角形共有4个；

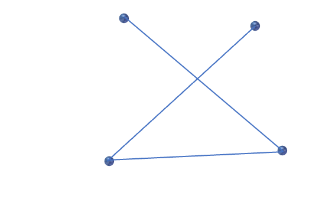


图1-2

3．五点式（图1-3）：必须用到五个端点才能构成的三角形，由一个端点和两个交点构成，每个端点都可以充当一次五点式三角形的顶点，因此每五个点的一种排列方式最多对应5个三角形，这类三角形一共有5个。

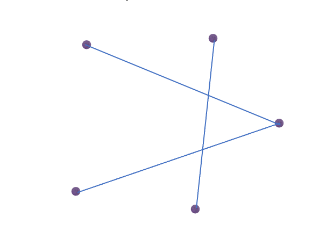


图1-3

4．六点式（图1-4）：必须用到六个点才能围成的三角形，只能由三个交点构成，每六个点的一种排列方式最多能对应一个六点式三角形，因此此类三角形有个。

5．六点以上式：当点的数量大于等于7个时，要全部利用时连线至少有四条，不能形成一个三角形，所以这种三角形是不存在的。

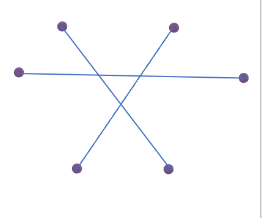


图1-4

且当n个点满足围成一个凸n边形，除端点外没有任何一个点同时被三条线段经过时，上述每一组假设都可取到“最多”。

综上所述，n个点两两相连最多形成的三角形数为：

方法二（张金阳）：

思路：通过有规律的穷举，依次算出所有情况。

具体过程：

一、分析

1、判断出应在凸十边形情况下得到最值。

2、一个三角形必有三条边，确定三条边所在直线，即可确定一个三角形。

3、在凸十边形中，两个点之间所隔点数可能为0，1，2，3，4，故可由此将十边形的边及其顶点之间的连线分成五类：记作“2”，“3”，“4”，“5”，“6”。由此可以根据边所在直线的种类排除计数。

4、在计数的过程中，可选择一条确定直线（如“排除“2”边”步骤中，即选择一条“2”边），将这条直线所围住的点所发出的直线相交的情况一次计数然后将一条此类直线的情况数乘以此类直线数记得到此类直线的三角形总数。

5、如在围成的平面图形中，两点的位置对称，则可将两点等效。在得出一种情况后，即可知与它等效情况的三角形数。

6、在计数过程中，有的情况中含有两条所排除种类的直线，此时应将重复情况数减半计入；若有三条同类（所排除）直线则将重复情况乘一三分之一计入。

二、过程

1、排除“2”直线（以图2-1为基础）

记一条“2”直线的两顶点分别为A1，A2，则一条“2”直线的情况数为：1+2+3+4+5+6+7+8

其中，两条“2”直线的情况数为2种。故：10\*[(1+2+3+4+5+6+7+8)-1]=350种

随后得到排除“2”直线的简化图（图2-2）

2、以图2-2为基础，排除“3”直线，得到图2-3 计数共850种

3、以图2-3为基础，排除“4”直线，得到图2-4 计数共850种

4、以图2-4为基础，排除“5”直线，得到图2-5 计数共370种

5、以图2-5为基础，排除“6”直线， 计数共10种

计数完成。

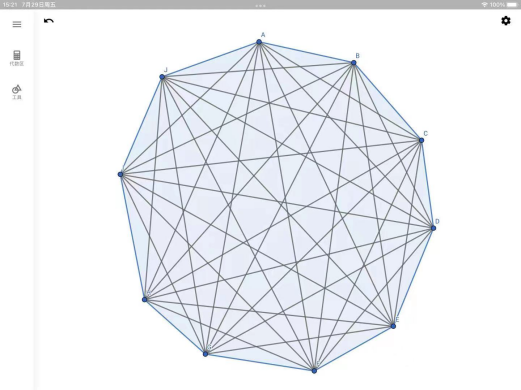
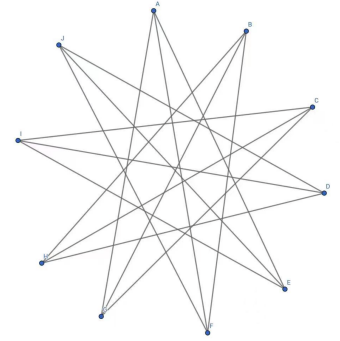
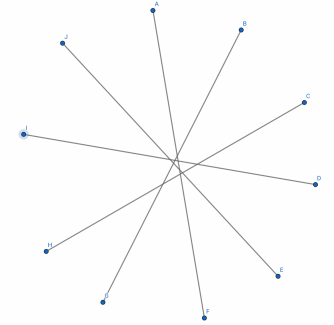


图2-1

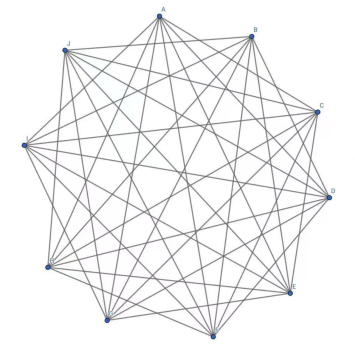
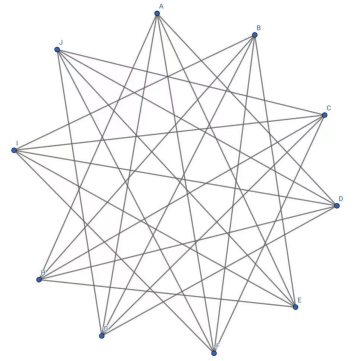


图2-2

图2-3

图2-4

图2-5

另有陈雨提出一种计数方法，相较于以上两法过于繁杂，故不冗述。

总结：

本次问题探讨使用了分析解构法和规律计数法，相同或相似的思路可以广泛的应用于计算机算法中，借助计算机的算力优势，以较优算法快速解决问题。可适用问题有城市内/间运输点规划、可能路径遴选等实际问题。

**课题探究：陈 雨 石永烨 张金阳 赵常景行**

**报告撰写： 陈 雨 张金阳 赵常景行**

**指导教师： 李 杨**