PISA数学素养与测试框架研究

结题报告

课题名称：PISA数学素养与测试框架研究

课题研究人：朱永怡

课题指导教师：赵化冻

学校：中国矿业大学附属中学

1 PISA测试的内涵

1997年，为了进行学生学业成绩的跨国比较研究，世界经济合作与发展组织（OECD）启动了国际学生评估项目（Programme for International Student Assessment 简称PISA），PISA在各参与国普遍接受的框架内，用学业成绩来监督各国教育系统的结果。PISA测试以下内容：义务教育将近结束时，年龄为15岁左右学生是否具有现实生活和终身学习所必需的知识、技能和基本素养，因而其测试更聚焦于学生解决现实问题的能力。同时，PISA还通过问卷、访谈分析学生成绩与教育背景、学校因素及学生情感态度价值观之间的关系，并藉此给各国提供反馈报告。第一次PISA测试于2000年举行，其后每三年举行一次。PISA测试分为三个领域：阅读素养、数学素养及科学素养。每次测试聚焦于一个领域，如2000年为阅读素养，2003年为数学素养，2006年为科学素养，依次往复。

1.1 PISA对素养的界定

PISA测试建立在“终生学习”的理念之上，即一个人在他的一生中不断通过学习获得为成功适应变化世界所必需的新知识、新技能、新素养。因此，PISA不仅关注学生对知识技能的掌握，更关注学生良好的思维过程、学习策略和方法。

基于此，PISA关注的是青少年在现在和未来生活中必须的基本的阅读素养、数学素养和科学素养，以及利用这些素养解决现实问题的能力。这种素养是对学科领域内最基本概念与基本原理的理解，以及这种基本概念和基本原理在现实情境中的迁移能力。因此，PISA测量的是完成真实生活相关任务的能力，而不是知识学习的多寡。

PISA给出的“素养（literacy）”的概念是：学生应用所学知识和技能，分析、推理和进行有效沟通，解决和解释不同情境中问题的能力。分析其素养概念，聚焦于以下几点：第一，知识技能方面：掌握核心知识与核心技能；第二，能力方面：能够进行全面分析、条理化推理、清晰表达和顺畅交流；第三，问题解决（知识迁移）方面：能够在具体情境中实现知识技能的迁移，从而解决问题。

1.2 PISA测试框架

国际专家团基于调查确定各测试领域的知识技能范围和能力范围，进而制定该领域的测试框架。测试框架制定包括以下步骤：第一，制定测试领域的操作性界定；第二，确定构建测试题目所需的一系列关键特征，并使关键特征可操作化；第三，评估每个变量对各参与国理解任务难度的贡献；第四，准备对结果的解释方案。测试框架作为测试工具制定的基础，进而设计出反应测试框架的试题。

1.3 PISA测试领域

PISA测试超越了学校的知识与技能，关注学生在未来生活中必备的阅读素养、数学素养、科学素养和问题解决能力（运用多种知识技能解决现实问题时的分析、综合、判断、决策能力）。因而其测试领域分为阅读素养领域、数学素养领域、科学素养领域。PISA清晰地界定了这三个领域的概念，因而，其概念内涵决定了测试内容，这一点将放在后面予以论述。

1.4 PISA测试题目

PISA的试题和背景问卷均有专家制定，并由参与国审阅，选取各国都无异议的题目进行测试。测试题目类型如下表：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 题型 | 具体题型 | 解答方式 |
| 选择题 | 单选题 | 单选 |
| 多选题 | 多选 |
| 问答题 | 简答题 | 学生简要回答 |
| 封闭式答题 | 有限种正确答案 |
| 开放式答题 | 答案开放，允许多样化、个性化答案 |

PISA测试卷中包括背景问卷，学生背景问卷回答与学习态度和家庭背景有关的问题，学校领导背景问卷则回答与学校有关的情况。背景问卷设置的目的是分析影响学生成绩的因素，如社会、学校、家庭、学生情感态度价值观对学生成绩的影响，从而促进各国教育决策者有的放矢，针对社会、学校、家庭、学生中的弱项出台政策，予以改善。

1.5 PISA测试结果反馈

测试结束后，OECD会在当年年底公布测试结果摘要，并在第二年提供一份详细的包括PISA全部评价结果的国际评价报告。整个评价结果报告的摘要将在PISA官方网站（http：//www.pisa.oecd.org）上公布，内容包括各国平均分排名、影响因素（教育体制、课程设置、学校因素、家庭因素、个体因素）与分数的相关性等。

2 PISA数学素养与《高中数学课标》数学素养比较

PISA的鲜明特点在于其前瞻性，它着重评价15岁左右学生运用知识、技能迎接现在和未来现实生活挑战的能力，而不是看他掌握学校知识技能的多寡。因此，PISA试题多根植于现实情境，考察点在于学生在面对现实问题时激活数学知识、技能和思维的能力。

2.1 PISA数学素养

PISA对数学素养的界定为：数学素养是个体在各种情境中进行数学表述、数学运用和数学阐释的能力，它包含数学推理，运用数学概念、数学步骤、数学事实和数学工具来描述、解释和预测数学现象。它帮助个体认识数学在现实世界中起到的作用，作出有根据的判断和决策，以成为具有建设性、参与意识和反思能力的公民。

2.2 《高中数学课标》数学素养

在2017年颁布的《普通高中数学课程标准》中，为了更好的明晰数学素养，课标分以下层次进行阐述：

### 2.2.1 数学培养目标

数学要培养什么样的人，即数学的终极培养目标。课标将其描述为：会用数学的眼光观察世界，会用数学思维思考世界，会用数学语言表达世界，我们将其称为“三会”。

### 2.2.2 数学素养界定

《高中数学课标》将数学素养界定为：具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感态度价值观的综合体现。

### 2.2.3 “三会”具体化得到数学素养六大要素

将“三会”中需要的关键能力具体化就得到数学素养的六大要素。

首先，会用数学的眼光观察世界。在这个过程中需要的关键能力是数学抽象，即将现实世界中质的东西全部剥离，仅保留其量的关系与形的关系，并形成数学的抽象结构。这个过程具体要用到符号化、形式化、符号运算、逻辑推理、模型构建等。数学抽象决定了数学的第一个基本特性，即数学的一般性。就像一枚硬币有不可分割的两面，数学抽象和直观想象也是一对孪生兄弟，抽象的数学总是建立在现实直观或直观数学的基础上，另外，对抽象数学结构的思维也可以以形象化思维的方式进行。著名数学教育家弗莱登塔尔有一著名论断：与其说学习数学，不如说学习数学化。数学化包括横向数学化、纵向数学化和逆向数学化。横向数学化是对客观世界进行数学化，构造出数学概念、法则、模型等；纵向数学化是对低层次数学进行数学化，即对已有数学知识进行分类、综合、抽象、构造，以形成抽象度更高、更具一般性的形式体系；逆向数学化是为数学知识寻求现实原型或直观解释，使其回到低抽象度层次，以利于理解。可以看到，《高中数学课标》中介绍的“数学抽象”和“直观想象”两个数学素养正是弗莱登塔尔“数学化”思想的具体体现。

其次，会用数学思维思考世界。在这个过程中需要的关键能力是逻辑思维，即从一些前提或事实出发，依据一定的规则得到或验证命题的思维过程。逻辑思维决定了数学的第二个基本特征，即数学的严谨性。而数学运算是一种特殊的逻辑推理，历来是我国中小学数学教育的优势。因此，数学运算也作为一个数学核心素养提出。

再次，会用数学语言表达世界。在这个过程中需要的关键能力是数学建模，即利用数学语言、数学结构来刻画研究对象的性质、关系和规律。数学建模包含两层意思：一是建模的过程，二是数学模型本身。如将出租车付费问题抽象成分段函数，如何设未知量、找数量关系、函数表示固然重要，但分段函数这个模型本身也是十分重要的。数学建模决定了数学的第三个基本特征，即数学的应用广泛性。统计概率也是作为一种数学模型出现的，而且在大数据时代地位越来越重要，因此，数学分析也成为数学核心素养的一员。

综上所述，在《高中数学课标》中提出的六个数学核心素养中，其重要性是不同的。正如《高中数学课标》修订者史宁中教授所说：数学的本质就是三个，抽象、推理和模型。

2.3 《高中数学课标》数学素养和《义务教育阶段数学课标》数学素养对应关系

综上所述，在《普通高中数学课程标准（2017年版）》和《义务教育阶段数学课程标准（2011年版）》具有一脉相承的关系，因而两个课标提出的数学核心素养具有对应关系。在《义务教育阶段数学课标》中，数学素养以“核心词”的形式出现，与数学抽象对应的核心词为符号意识，与逻辑推理对应的核心词为推理能力，与数学建模对应的核心词为模型思想……。因为，相较于《义务教育阶段数学课标》中的核心词，《高中数学课标》中的数学核心素养更广为人知，所以本文将《高中数学课标》中的数学核心素养作为比较对象。

2.4 PISA数学素养和《高中数学课标》数学素养的比较

### 2.4.1 相同点

PISA数学素养与《高中课程标准》数学素养都强调数学思维品质、数学能力的培养，都认为数学学习不只是知识的理解和技能的掌握，而应当上升到数学思想、数学能力、数学精神、数学信念层次。另外，二者都关注学生数学学习中情感的体验，态度、价值观的树立。

### 2.4.2 不同点

### 2.4.2.1 实际问题解决还是思维训练

因为前面提到的PISA的前瞻性特性，PISA数学素养强调学生能在情境中应用数学，解决实际问题，作出判断和决策，其聚焦点在于实际问题解决。《高中数学课标》数学素养强调的是数学抽象、逻辑推理、数学建模等数学能力的提升，其核心是数学思维训练，这与我国传统数学教学理念有关。

二者的不同或许基于不同文化背景下对数学的认识不同，即数学观的不同。PISA认为数学是一种语言，一个人精通某们语言意味着他必须知道这门语言的语义背景，并能在不同的背景中灵活应用，以使其发挥不同社会功能。我国传统观念认为数学是一个思维场，其最大功能是训练人的思维的灵活性、深刻性、严谨性。数学是思维的体操，数学思维是理性思维。因而，《高中数学课标》中的数学素养更强调数学思维能力方面。

### 2.4.2.2 数学表达与抽象、模型

在数学能力方面，PISA认为，学生在解决数量的、空间的、概率的实际问题时，要能够有效的分析、推理、交流（数学表述），并有效利用数学模型（运用数学工具）。《高中数学课标》强调的则有数学抽象、逻辑推理、数学建模。通过比较，发现二者都有推理能力和模型能力。但是，二者也有不同。第一，PISA强调数学的表达和交流，而《高中数学课标》强调数学抽象。第二，PISA强调对数学模型的有效利用，而《高中数学课标》则强调数学建模的过程。

PISA强调数学的表达和交流，是因为PISA把数学看作一种语言，语言的功能是交流，语言也只有在表达和交流中才能熟练。另外，PISA更倾向于知识的集体建构观点，即不同人不同观点在碰撞中的融合统一。而《高中数学课标》强调数学抽象、数学建模，是让学生经历由现实情境语言到数学形式化语言过程，是经历现实情境结构到数学抽象结构的过程。所以，《高中数学课标》更倾向于数学知识的个人建构，即在过程经历中，从经验中抽象出数学。

### 2.4.2.3 其他

虽然PISA数学素养和《高中数学课标》数学素养在以上两方面存在不同，但并不是说《高中数学课标》就不注重问题解决，PISA数学素养就不注重数学思维训练。《高中数学课标》提出数学的文化观，即数学作为一种文化出现。同时，“四能”目标强调学生发现问题、提出问题、分析问题、解决问题能力的培养，也即强调实际问题解决在数学教学中的价值。PISA提出运用数学表述、数学运用、数学推理、数学阐释来解决现实情境问题，也即强调数学思维的训练。两者的区别基于不同的文化传统，基于不同的数学观。但当东方遇到西方，二者必将相互学习、相互借鉴、相互融通。

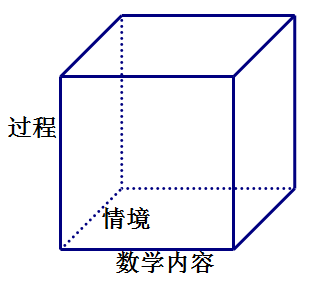
3 PISA数学素养测试框架

PISA数学素养测试框架分为三个维度，如下图，一是问题中蕴含的数学内容，二是作为问题引导性材料的情境，三是激活数学与所观察问题情境之间的联系，即过程。

3.1 测试框架维度一：数学内容

数学内容维度包括分为四个领域：数量、变化和关系、空间和形状、不确定性。

### 3.1.1 数量

数量涉及到数字现象、数量关系及类型、数字间关系的识别、用数字描述事物的数量、测量、对各种形式数字的加工和理解。对数量问题的解决涉及数感、数字表征、运算和估算。数字表征涉及数学素养“数学抽象”，运算和估算涉及数学素养“数量推理（运算）”。这一块内容与算术对应。

### 3.1.2 变化和关系

“变化和关系”涉及：多样化的数学表征方式、变量间的数学关系。“多样化的数学表征方式”如符号表示、代数表示（式方程函数等）、表格表示、几何图形表示、图像表示。“变量间的数学关系”如相等关系、不等关系、函数关系、整除关系、包含关系等。这一块内容与代数对应。

### 3.1.3 空间和形状

“空间和形状”涉及：空间、形状、空间和形状之间的关系。“空间”如二维空间、三维空间。“形状”如三角形、圆柱体等几何图形和几何体。“空间形状之间关系”如不同角度呈现的图形。这一块内容与几何对应。

### 3.1.4 不确定性

不确定性涉及：统计、概率、统计与概率间关系。这一块内容与统计概率对应。

3.2 测试框架维度二：情境

PISA测试题中的问题情境可分为四类：个人的、职业或教育的、公共的、科学的。

### 3.2.1 个人的情境

个人的情境与学生个体的日常生活密切相关，因而是学生最为熟悉的。但每个学生知觉生活情境的方式不同，因而对其理解不同，或许就会有所偏差。解决此类问题，学生需要透彻的领悟情境，抓住情境内含的本质。

### 3.2.2 职业或教育的情境

学生生活在学校中，因而教育的情境学生较为熟悉。不同的职业行当在工作情境中会遇到一些共性的问题，这就需要一定的数学方法予以解决。以上两种情境属于职业或教育的情境。

### 3.2.3 公共情境

公共情境常与社区相联系，是发生在社区或更大范围的问题。学生需要在众多信息中寻找有用信息，收集数据，寻找变量，评估影响社区问题的各个方面。

### 3.2.4 科学情境

当情境涉及某一技术过程，或涉及其他学科领域，或带有明显数学元素却不能置于更宽广环境中的那些抽象的数学情境，我们称之为科学情境。

### 3.2.5 四种情境比较

四种情境与学生的距离愈来愈远，学生对个人情境的认识依靠的感知觉，对职业或教育情境的认识依靠的是经验，多公共情境的认识依靠的是远距离观察，对科学情境的认识则依靠思辨。因而，学生对四种情境中数学结构感知的敏感度是有差异的。例如，学生对出租车付费中的数学结构（分段函数）比较敏感，但对于苯环中的数学结构（正六边形）则颇感陌生。

在每一种情境中，都有复杂情境和简单情境之分。有些情境数学元素明显，数学特征清晰，解决办法容易找到。而有些情境数学元素纷杂，数学特征隐藏，解题方向迷乱，这就需要一定的辨识能力和抽象能力，还需要一定的目标定位能力，这样能才能摒弃迷惑信息、删减无用数学元素，精炼数学结构，明晰解决方案。

3.3 测试框架维度三：过程

由于PISA测试关注的是情境中的问题解决，所以其实质是一个数学建模过程，即辨识情境中的数学结构，激发头脑中数学知识、技能来解题的过程。这个过程包括：梳理整合情境中的信息，删除无用信息，多种方法呈现情境问题的各个侧面，多种方式表征问题中数量关系或图形关系，将其与自己熟悉的某个问题或某个数学结构相联系，构建一个恰当的数学模型。

这个情境问题数学化的过程需要多种能力，如猜想、论证、推理、表征、建模、交流、形式化运算等。PISA将其划分为三个基本能力群，即再现能力群、联系能力群、反思能力群。

PISA划分的三个能力群是一个由低阶到高阶的能力群，不同层阶的划分根植于布鲁姆教育目标分类学。布鲁姆教育目标分类学将认知层次分为六阶：记忆（从长时记忆中提取信息），理解（从信息中建构意义，包括解释、概括、推论、比较等），运用（在给定情境中应用或灵活应用某知识），分析综合（把材料分解成组成部分并确定各部分如何联系以形成整体），评价（依据标准作出判断），创造（将要素加以组合形成新的模式或结构）。

### 3.3.1 再现能力群

再现能力群对应布鲁姆教育目标分类学中的记忆层阶，即在在头脑中检索并回忆起相关数学知识解决问题。例如：数学概念、数学规则、常见表征、数学对象及其性质、常用算法等。这一能力群用于解决简单情境问题。

### 3.3.2 联系能力群

联系能力群对应布鲁姆教育目标分类学中的理解层阶和运用层阶，即在不同的情境表征之间建立联系，关注情境问题的不同侧面，对问题形成一个整体关联性理解，进而灵活运用数学知识、技能解决问题。

### 3.3.3 反思能力群

反思能力群对应布鲁姆教育目标分类学中的分析综合层阶和创造层阶，即在解决情境问题时有一定的洞察能力和反思能力，能在分析、综合、概括的基础上，创造性的运用数学知识技能解决问题。

### 3.3.4 测试领域六个能力水平及其所对应的能力群

PISA详细阐述了学生在空间和形状、变化和关系、数量、不确定形这四个测试领域可能达到的六个能力水平。六个能力水平由低到高排列，水平1、水平2对应着再现能力群，水平3、水平4对应着联系能力群，水平5、水平6对应着反思能力群。从各个水平的具体阐述中，我们可以看到各能力群具体包含了哪些能力。以“空间和形状”领域的能力水平划分为例，如下表：

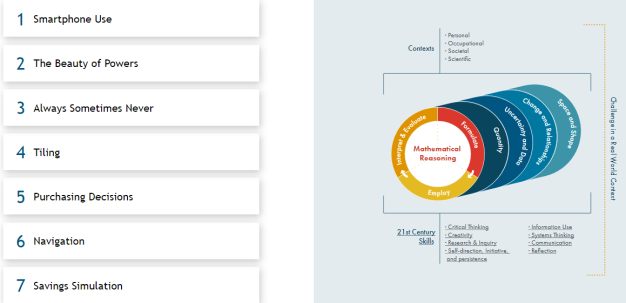
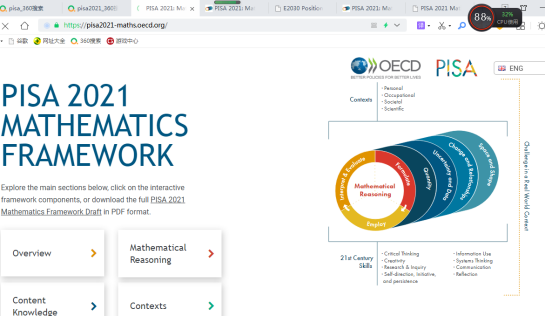
“空间和形状领域”数学能力水平的划分

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 水平 | 每个水平学生应具备的能力 | 学生应该能完成的具体任务 |
| 6 | 解决复杂问题；多元表征；连续演算；信息联接；推理、深刻洞察、反思；交流答案；提供解释；论证过程 | 解释复杂文本，将其转化为其他表征（多元表征）；  在复杂问题情境中进行推理（推理）；  面对复杂几何情境表现出深刻洞察力（洞察）；  辨认并结合多个信息以解决问题（信息联接）；  连续复杂运算（连续演算）；  在反思基础上写出解释和论证过程（提供解释、论证过程）； |
| 5 | 解决需要提出恰当假设的问题；连接不同表征；有策略的多步连续计算；良好的空间推理、论证、洞察； | 解释几何现象的多种表征（表征）；  使用空间/几何推理、论证、反思和洞察（推理反思洞察）；  利用假设解决现实情境中几何问题并能交流解释（交流）；  运用已知几何模型（模型）；  在陌生情境中使用常见几何算法（灵活运用）； |
| 4 | 在陌生情境中解决需要空间推理的问题；联系不同表征；进行系列运算；清晰地解释； | 解释复杂文本的意思（表征转换）；  将空间洞察用于非标准几何情境（洞察，灵活应用）；  使用二维模型处理不熟悉几何情境中的三维表征（策略灵活）；  连接整合几何情境中两种不同视觉表征（信息联接）；  在几何情境中推论和论证数字关系（推理，论证）；  能进行简单运算（运算）； |
| 3 | 解决熟悉情境中数学问题；连接熟悉物体不同表征；使用基本问题解决技能；运用简单算法； | 解释陌生几何情境中的文本描述（表征转换）；  运用基本问题解决技能（直接应用）；  运用基本空间推理技能（简单推理） |
| 2 | 解决单一数学表征、数学内容呈现清晰的题目；在熟悉背景下运用基本数学方法解题； | 识别简单几何形体（识记）；  应用基本几何概念（识记）；  在几何情境中使用数学语言解释日常语言中关系词语（如：更大）  形成几何图形的心理表象（识记）；  运用简单运算解决几何问题； |
| 1 | 利用直观图片及基本运算技能解决熟悉背景中的简单问题； | 使用给定的二维表征来计数或计算简单三维物体的构成要素； |

通过上表可以看到，PISA测试框架维度三（过程）关注的能力主要有：多元表征，多种解题策略，连续演算，推理、洞察和反思，信息联接，数学表达和交流，数学论证。

4 基于PISA测试框架的试题分析

PISA（数学）官方网站上（https：//pisa2021-maths.oecd.org）放出了PISA（2021）测试的7道题目（如下图），分别是智能手机使用（Smartphone Use），乘方运算的美妙（The Beauty of Powers），必然、可能与不可能（Always Sometimes Never），铺瓷砖（tiling），购物决定（Purchasing Decisions），飞行（Navigation），储蓄模拟（Savings Simulation）。现基于PISA数学测试框架对其中个别题目进行分析。

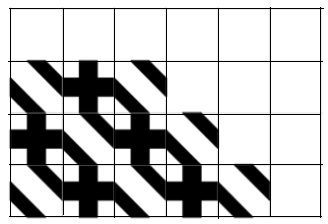


4.1 铺瓷砖

### 4.1.1 铺瓷砖题目

瓷砖工有两种瓷砖可供使用，分别是瓷砖A和瓷砖B。如果只用A或只用B，可铺成如下两种图案。

（1）如何将A、B两种瓷砖组合使用进行密铺，则得到下图，请补全下图。

（2）如下图，瓷砖工向提供给用户一份指导书，使得用户能够利用A、B铺出相同的图案，请你帮助瓷砖工完成此指导书。

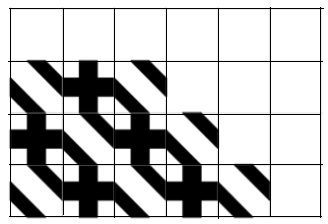
如果这一行是奇数行，则左手第一块瓷砖是 （填A或B）；

如果这一行是偶数行，则左手第一块瓷砖是 （填A或B）；

在每一行中

如果上一块瓷砖是A，则下一块瓷砖是 （填A或B）；

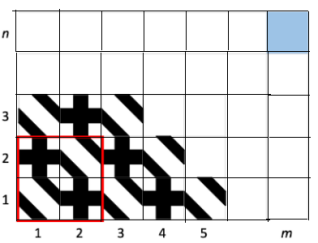
如果上一块瓷砖是B，则下一块瓷砖是 （填A或B）；

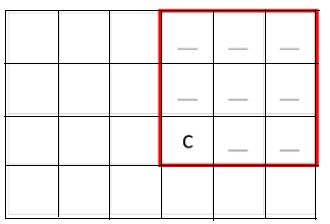
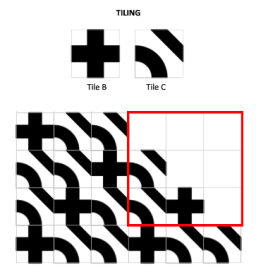
（3）如下图，瓷砖工想知道瓷砖品种与其所在坐标（m，n）有何关系，请你研究一下红色方框中的四块瓷砖并帮助瓷砖工选择（ ）。

A.如果m+n为奇数则用A，否则用B； B.如果m+n为偶数则用A，否则用B；

C.如果m×n为奇数则用A，否则用B； D.如果m×n为偶数则用A，否则用B；

E.如果m和n全是奇数则用A，否则用B； F.如果m和n全是偶数则用A，否则用B；

（4）若瓷砖工用B和C进行地板密铺，请你帮助填充左图（在方框内填入B或C）。



### 4.1.2 基于PISA测评框架的题目分析

这道题的题目类型是选择和简答。本题数学内容是“空间和形状”以及“变化和关系”，说是“空间和形状”，因为它涉及的是图形的密铺，说是“变化和关系”，因为它考察到“找规律”，即变量间的函数关系。本题情境为“职业情境”，因为它涉及的是瓷砖师傅铺瓷砖的工作。它涉及到的能力包括多元表征（用A、B表示不同花纹瓷砖）、分析（找图案放置规律）、数学推理（下一个瓷砖放置）、数学猜想（猜想（m，n）瓷砖图案）、数学表达（帮助瓷砖工制作指导书，表达（m，n）瓷砖放置规律）、数学论证（用不完全归纳法论证（m，n）瓷砖的放置规律）、知识迁移（将A、B组合密铺迁移到B、C组合密铺），本题涉及到的能力群应为联系能力群，在能力水平层级上应为第4或第5层级。